Ασκηση 6

X, Y νορμικοί και $T: X \to Y$ γραμμ. τελεστής ώστε

$\forall f \in Y^*$ να ισχύει $f \circ T \in X^*$.

Νδο T φραγμένος

(Δηλ. η ασκηση 3 ισχυει δίχως την υπόθεση της πληρότητας)

Απόδειξη

Θδο $\sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} < +\infty$

Αρκεί βάση της ασκ. 4 νδο $\forall f \in Y^* : \sup\{|f(Tx)| : x \in X, \|x\| \leq 1\} < \infty$

Αυτο πράγματι ισχύει διότι $\forall f \in Y^* : f \circ T \in X^*$

Αρα, $|f(T(x))| = |(f \circ T)(x)| \leq \|f \circ T\| \cdot \|x\| \leq \|f \circ T\|, \forall x \in X$ με $\|x\| \leq 1$

Ασκηση 7

Εστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών, ώστε για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_n \to 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει. Νδο $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει

Απόδειξη

$\forall \nu \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τον $T_n : c_0 \to \mathbb{R}$ τύπου:

$$T_n(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad , \forall x = (x_n) \in c_0$$

T_n γραμμική (αμεσο)

$\forall x = (x_n) \in c_0 \quad : |T_n(x)| = |\sum_{i=1}^{n} a_i x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot |x_i| \leq \|x\|_\infty \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_i|$

Αρα, $T_n \in c_0^*$: $\|T_n\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$

Επιλέγοντας, $x \in c_0$ ως εξής:

$$x_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}, & \alpha_i \neq 0, \ i \leq n \\ 1, & \alpha_i = 0, \ i \leq n \\ 0, & i > n \end{cases}$$

$\|x\|_\infty = 1$ και $\|T_n\| \geq T_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

Αρα, $\|T_n\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$

Απο την υπόθεση για κάθε $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$

$T_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ συγκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και άρα φραγμένη.

Η ακολουθία φραγμένων γραμ. τελεστών που είναι φραγμένοι γραμ. τελεστές στον $\mathbb{R}$ είναι κατά σημείο φραγμένη και αφου c_0 χώρος Banach, τότε από την αρχή ομοιομ. φράγματος, προκύπτει:

$\sup\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty \implies \sup_n \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| < \infty$

Αρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

Άσκηση 8

Έστω X, Y νορμικοί και $T: X \to Y$ συνεχής

ώστε $T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \forall x, y \in X$.

Νδο. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$

Απόδειξη

Αρκεί, νδο $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, $\forall x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Για $\lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, για κάθε $x \in X$:

$$T(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{\lambda \text{ φορές}}) = \lambda \cdot T(x) \qquad (\text{Επαγωγικά})$$

Για $\lambda \in \mathbb{Z}$:

$T(0) = 0$

$$T(x + (-x)) = T(x) + T(-x) \Rightarrow T(-x) = -T(x) \quad (1)$$

και αφού ισχύει για τους φυσικούς με το μηδέν και από την (1) θα ισχύει και για τους φυσικούς.

Για $\lambda = \frac{1}{n}$ έστε:

$$T(x) = T(n \cdot \tfrac{1}{n} x) = n T(\tfrac{1}{n} x) \Rightarrow T(\tfrac{1}{n} x) = \tfrac{1}{n} T(x).$$

Για $\lambda = q \in \mathbb{Q}$:

$$T(qx) = T\left(\frac{m}{n} x\right) = \frac{m}{n} x \quad (\text{από τις περιπτώσεις } 2 \text{ και } 3)$$

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$:

— τότε $\exists (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ρητών με $q_n \to \lambda$

— Τότε $q_n x \to \lambda x$

Εφόσον T συνεχής

$$T(\lambda x) = \lim_n T(q_n x) = \lim_n q_n T(x) = \lambda T(x)$$

ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ — HILBERT.

Ορισμός: Έστω E δ.χ. επί του $\mathbb{R}$ και μια απεικόνιση τέτοια $\langle , \rangle : E\times E \to \mathbb{R}$. Τότε, αυτή η απεικόνιση καλείται εσωτερικό γινόμενο αν ισχύουν

i) $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\forall x\in E$, $\langle x,x\rangle = 0 \iff x=0$

ii) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$, $\forall x,y \in E$

iii) $\langle \lambda x+\mu y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle$, $\forall x,y,z\in E$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Τότε λέμε ότι E χώρος με εσωτερικό γινόμενο

Παρατηρήσεις

- Απο τις (ii), (iii) προκύπτει η γραμμικότητα ως προς τη $2^{η}$ μεταβλητή, δηλ. $\langle x, \lambda y+\mu z\rangle = \lambda\langle x,y\rangle + \mu\langle x,z\rangle$ για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και $x,y,z\in E$

- $\langle x,0\rangle = \langle x,0-0\rangle = \langle x,0\rangle - \langle x,0\rangle = 0$, $\forall x\in E$

- Στην περίπτωση που E είναι δ.χ επί του $\mathbb{C}$ η (ii) αντικαθιστάται απο την σχέση:

  $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$, $\forall x,y\in E$ και αποδεικνύεται ότι ισχύει:

  $\langle x, \lambda y+\mu z\rangle = \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + \bar{\mu}\langle y,z\rangle$.

Σύμβαση Θα αναφερθούμε σε πραγματικούς χώρους

Προταση (Cauchy-Schwarz)

Εστω E χωρος με εσωτερικο γινομενο και $x, y \in E$

Τοτε $|<x,y>| \leq <x,x>^{1/2} \cdot <y,y>^{1/2}$

Αποδ.

Ισοδυναμα θδο:

$<x,y>^2 \leq <x,x> \cdot <y,y>$

- Αν $y=0$ ισχυει η ισοτητα
- Αν $y \neq 0$ τοτε $<y,y> > 0$

Τοτε $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $<x-\lambda y, x-\lambda y> \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow <x,x> - \lambda <x,y> - \lambda <y,x> + \lambda^2 <y,y> \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow <x,x> - 2\lambda <x,y> + \lambda^2 <y,y> \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = (-2<x,y>)^2 - 4<y,y><x,x> \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{<x,y>^2 \leq <x,x><y,y>}$

Ορισμός

Εστω $(E, <,>)$ χωρος με εσωτερικο γινομενο

Οριζουμε $\|\,\| : E \to \mathbb{R}$ με $\|x\| = <x,x>^{1/2}$

Αρα, η παραπανω ανισοτητα θα γραφεται

$|<x,y>| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Πρόταση

$\|x\| = \langle x,x \rangle^{1/2}$ αποτελεί νόρμα στον E.

Απόδειξη

- $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in E$ και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ αφού $\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{1/2} = |\lambda| \cdot \langle x,x \rangle^{1/2}$
$= |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x \in E, y \in E$ διότι

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + 2\langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle =$$
$$= \|x\|^2 + 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2 \overset{C\text{-}S}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Άρα, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Σχόλιο

Εάν $(E, \langle , \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο ορίζεται η νόρμα $\|\cdot\|$ και οι τοπολογικές έννοιες στον E νοούνται ως προς αυτή τη νόρμα

Πρόταση

Αν $(E, \langle , \rangle)$ χώρος με εσωτερ. γινόμενο τότε η απεικόνιση $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής

Απόδειξη

Ας είναι $(x_n, y_n) \in E \times E$ με $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$

και θδο $\langle x_n, y_n \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle$.

Έτσι, παίρνουμε τη διαφορά:

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leq$$

$$\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \overset{C-S}{\leq} \underbrace{\underbrace{\|x_n\|}_{\varphi\rho.} \underbrace{\|y_n - y\|}_{\to 0} + \underbrace{\underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} \cdot \|y\|}_{\to 0}}_{\to 0}$$

Πρόταση

Έστω $(E, \langle , \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

Τότε $\forall x, y \in E$ ισχύουν τα ακόλουθα:

i. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

(κανόνας του παραλληλογράμμου).

ii. $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

(Απόδειξη άμεση)

Πόρισμα

Αν E δχ και $\langle , \rangle_1$ και $\langle , \rangle_2$ εσωτερικά

γινόμενα στον E ώστε $\langle x, x \rangle_1 = \langle x, x \rangle_2$, $\forall x \in E$

τότε $\langle x, y \rangle_1 = \langle x, y \rangle_2$, $\forall x, y \in E$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ νορμικός, ώστε η νόρμα του να ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, δηλ.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \ \forall x, y \in X$$

Ορίζουμε $<,> : E \times E \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$<x,y> = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$ τότε αυτό είναι εσωτερικό γινόμενο στον X, $\forall x \in X$

ισχύει $\|x\| = <x,x>^{1/2}$

η νορμα του X προερχεται απο εσωτερικο γινόμενο

Αποδειξη

$$<x,x> = \frac{1}{4}\left(\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2\right) = \frac{1}{4}\left((2\|x\|)^2 + 0\right) = \|x\|^2$$

Αρα, $<x,x> \geq 0$, $\forall x \in X$ και $<x,x> = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Επισης, $<y,x> = <x,y>$, $\forall x, y \in X$ (προφανές)

Μένει νδο $<x+y, z> = <x,z> + <y,z>$ ← (α)

και οτι $<\lambda x, z> = \lambda <x,z>$ ← (β)

Αποδειξη του (α)

Απο τον κανονα του παραλληλογράμμου για το $x+z$ και το $y+z$.

$$2\|x+z\|^2 + 2\|y+z\|^2 = \|x+y+2z\|^2 + \|x-y\|^2, \ \forall x, y, z \in X \quad (1)$$

Οπου $z = -z$

$$2\cdot\|x-z\|^2 + 2\|y-z\|^2 = \|x+y-2z\|^2 + \|x-y\|^2, \ \forall x, y, z \in X \quad (2)$$

$$2\|x+z\|^2 + 2\|y+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - 2\|y-z\|^2 =$$

$$= \|x+y+2z\|^2 + \cancel{\|x-y\|^2} - \|x+y-2z\|^2 - \cancel{\|x-y\|^2}, \quad \forall x, y, z \in X$$

ισοδύναμα,

$$\cancel{8} \langle x, z \rangle + 8 \langle y, z \rangle = 4 \langle x+y, 2z \rangle, \quad \forall x, y, z \in X$$

$$2 \langle x, z \rangle + 2 \langle y, z \rangle = \langle x+y, 2z \rangle, \quad \forall x, y, z \in X \quad (3)$$

Απο τον ορισμο γνωστο είναι οτι: $\langle 0, z \rangle = 0$, $\forall z \in X$

Απο την (3) επεται λοιπον οτι:

$$2 \langle x, z \rangle = \langle x, 2z \rangle$$

Τοτε λοιπον, στην (3)

$$2 \langle x, z \rangle + 2 \langle y, z \rangle = 2 \langle x+y, z \rangle \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = \langle x+y, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in X} \leftarrow (\alpha)$$

Εστω $z \in X$ και οριζουμε

$f_z : X \to \mathbb{R}$ με $f_z(x) = \langle x, z \rangle$

Εντουτοις, η f_z ειναι συνεχης και

λογω της (α) $f_z(x+y) = f_z(x) + f_z(y)$, $\forall x, y \in X$

και απο την ασκηση 7, η f_z ειναι γραμμικη

άρα $f_z(\lambda x) = \lambda f_z(x)$, $\forall x$ επεται οτι

$\langle \lambda x, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle$, $\forall x, z \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ορισμός

Εάν $(E, <,>)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ νόρμα που προκύπτει από το $<,>$, και $(E, \|\cdot\|)$ Banach χώρος τότε το E καλείται χώρος Hilbert

Παραδείγματα:

1) $\mathbb{R}^k$ εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, δηλ. $<x,y> = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$ όπου $x = (x_1, \dots, x_k)$ και $y = (y_1, \dots, y_k)$

$$<x,x>^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2\right)^{1/2} = \|x\|_2$$

και ο $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_2)$ είναι πλήρης.

Άρα, $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_2)$ χώρος Hilbert.

2) $\ell^2(\mathbb{N})$ εφοδιασμένος με το εξής εσωτερικό γινόμενο:

$$<x,y> = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad \text{για κάθε } x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}},\ y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$$

Καταρχάς, η σειρά συγκλίνει αφού:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2}(|x_i|^2 + |y_i|^2) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) < \infty \text{. (απόλυτη σύγκλιση).}$$

$\forall x \in \ell_2(\mathbb{N})$:

$$\langle x,x\rangle = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2} = \|x\|_2$$

και $\ell_2(\mathbb{N})$ χώρος Banach με την $\|\cdot\|_2$

τότε $(\ell_2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ χώρος Hilbert

3) $C_{00}(\mathbb{N})$ με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$ δεν είναι Hilbert

διότι $(C_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ όχι χώρος Banach

4) Η $\|\cdot\|_p$ στον $\ell^p(\mathbb{N})$ ή στον $C_{00}(\mathbb{N})$ (για $p \neq 2$)

δεν προέρχεται απο εσωτερικό γινόμενο

αφού δεν πληρείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου.

Για $x = (1,1,0,0,\dots)$ και $y = (1,-1,0,0,\dots)$

$\|x\|_p = 2^{1/p}$, $\|y\| = 2^{1/p}$

$\|x+y\|_p = 2$, $\|x-y\|_p = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 4+4 = 8 = 2^3 \\ 2\|x\|_p^2 + 2\|y\|_p^2 = 2\cdot 2^{2/p} + 2\cdot 2^{2/p} = 2^{\frac{2}{p}+2} \end{array}\right\} \neq$$

Άρα, δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλ/μου

Άρα, η νόρμα δεν προέρχεται απο εσωτερ. γινομ.

Για $p = \infty$, τα ίδια αντιπαραδείγματα

$\|x\|_\infty = 1$, $\|y\|_\infty = 1$

$\|x+y\|_\infty = 2$, $\|x-y\|_\infty = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 8 \\ 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 4\end{array}\right\} \neq$$

Δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλ/μου.

5) Η $\|\cdot\|_\infty$ στον $C[0,1]$ δεν προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο.

$f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ και $f(t) = t$ και $g(t) = 1$.

$\|f\|_\infty = 1$, $\|g\|_\infty = 1$, $\|f+g\|_\infty = \sup\{|1+t| : t \in [0,1]\} = 2$

$\|f-g\|_\infty = \sup\{|t-1| : t \in [0,1]\} = 1$.

και προφανώς δεν πληρείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου.

6) Το εσωτερικό γινόμενο $<,> : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$

$$<f,g> = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$$

Η νόρμα που ορίζει : $\|f\| = \left(\int_0^1 (f(t))^2 dt\right)^{1/2}$

δεν είναι πλήρης (άσκηση)

Άρα, ο χώρος $C[0,1]$ δεν είναι Hilbert

Άσκηση (Α) Προηγούμενο Κεφάλαιο

Έστω X, Y χώροι Banach

$T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής ώστε να ισχύει:

$\forall x_n \in X : x_n \longrightarrow 0$ τότε $f(T(x_n)) \longrightarrow 0, \ \forall f \in Y^*$

Νδο ο τελεστής T είναι φραγμένος

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με το Θεώρημα κλειστού γραφήματος το οποίο μπορεί να εφαρμοστεί υπό την συνθήκη ότι ο T έχει κλειστό γράφημα $\subseteq X \times Y$.

Έστω λοιπόν, $(x_\nu, y_\nu) \in G_T$ και $(x,y) \in X \times Y$ τ/ω $(x_\nu, y_\nu) \longrightarrow (x,y)$ και θέλουμε νδο $(x,y) \in G_T$.

Έτσι, $x_\nu \longrightarrow x$ και $y_\nu \longrightarrow y$ και $y_n = Tx_n, \ \forall n$

Δηλαδή, έχουμε ότι: $x_\nu \longrightarrow x$ και $Tx_\nu \longrightarrow y$.

Θδο. $Tx = y$

Υποθέτοντας ότι $Tx \neq y$, από πόρισμα Hahn-Banach $\exists f \in Y^* : f(T(x)) \neq f(y)$.

όμως $x_n \to x \Rightarrow x_n - x \to 0 \overset{\text{Υποθ.}}{\Longrightarrow} f(T(x_n - x)) \to 0$

$\overset{\text{γραμ.}}{\Longrightarrow} f(T(x_n)) - f(T(x)) \longrightarrow 0 \Rightarrow f(T(x_n)) \longrightarrow f(T(x))$

Εφόσον, η f συνεχής και $T(x_n) \longrightarrow y$

$$\left.\begin{array}{l} \text{τότε } f(T(x_n)) \longrightarrow f(y) \\ \text{αλλά } f(T(x_n)) \longrightarrow f(T(x)) \end{array}\right\} \Rightarrow f(y) = f(T(x)) \ (\lightning)$$

Άσκηση (B)

Έστω X χώρος Banach και Y, Z δύο κλειστοί υπόχωροι του X, έτσι ώστε $X = Y + Z$ και $Y \cap Z = \{0\}$

Νδο υπάρχει $M > 0$ ώστε να ισχύει:

$\|y\| \leq M \cdot \|y+z\| \quad \forall y \in Y, \forall z \in Z$.

Λύση

Λόγω της υπόθεσης $X = Y + Z$ & $Y \cap Z = \{0\}$

κάθε $x \in X$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο

$x = y + z$, $y \in Y$, $z \in Z$

Έτσι, ορίζεται καλά ο τελεστής

$P: X \to Y$ μ/ω $P(y+z) = y$, $\forall y \in Y, z \in Z$

όπου προφανώς είναι γραμμικός.

Αρκεί νδο P έχει κλειστό γράφημα

(αφού X, Y Banach χώροι και P γραμμικός).

Ας είναι $(x_n, y_n) \in G_P$ με $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$

και θδο $(x, y) \in G_P$

Δηλ. $(x_n, P(x_n)) = (x_n, y_n)$ και $(x_n, P(x_n)) \longrightarrow (x, y)$

$\Rightarrow x_n \to x$ και $P(x_n) \longrightarrow y$ και θδο $P(x) = y$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το x_n γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $x_n = y_n + z_n$ με $y_n \in Y$, $z_n \in Z$

και έχουμε $P(x_n) = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Έτσι, επειδή

$$\left.\begin{matrix} x_n \to x \\ y_n \to y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{x_n - y_n}_{z_n} \to x - y \Rightarrow z_n \to x - y$$

Άρα, εφόσον $z_n \in Z$ και $n \in \mathbb{N}$ και Z κλειστός

$\Longrightarrow x - y \in Z$

Τότε $x = \underbrace{y}_{\in Y} + \underbrace{(x-y)}_{\in Z}$ και άρα $P(x) = y$

Άρα, $(x,y) \in G_{P}$ $\Rightarrow$ P φραγμένος $\Rightarrow \|y\| \leq M \cdot \|y+z\|$
$M > 0$

Άσκηση Γ

Έστω X δχ και $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ δύο νόρμες στον X ώστε οι $(X, \|\cdot\|_1)$ και $(X, \|\cdot\|_2)$ χώροι Banach. Αν ορίζεται $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$ (νόρμα), τότε Νδο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach αν οι νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες μεταξύ τους

ΛΥΣΗ

· Έστω $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες.

Τότε $\exists\, m, M > 0 : m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \|x\|_1$

· Έστω (x_n) βασική στον $(X, \|\cdot\|)$ τότε $\forall n, m \in \mathbb{N}$:

$$\|x_n - x_m\|_1 \leq \|x_n - x_m\|_1 + \|x_n - x_m\|_2 = \|x_n - x_m\|$$

και άρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον $(X, \|\cdot\|_1)$

Άρα, εφόσον $(X, \|\cdot\|_1)$ είναι χώρος Banach

$\exists x \in X$ ε/ω $\|x_n - x\|_1 \to 0$

Από την υπόθεση $(\|x\|_1 \sim \|x\|_2)$

Έπεται ότι $\|x_n - x\|_2 \to 0$.

$$\underbrace{\|x_n - x\|_1 + \|x_n - x\|_2}_{\|x_n - x\|} \to 0$$

$\|x_n - x\| \to 0$.

Άρα, η τυχαία βασική ακολουθία συγκλίνει.

Άρα, $(X, \|\cdot\|)$ Banach χώρος

Για τον <u>αντίστροφο</u> εγκλεισμό:

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach

αφού, $\|x\|_1 \leq \|x\|$, $\forall x \in X$ και $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|)$

είναι χώροι Banach. Από το πόρισμα του

Θεωρήματος της ανοιχτής απεικόνισης:

$\exists c$: $\|x\| \leq c \cdot \|x\|_1$, $\forall x \in X \Rightarrow \|x\|_1 + \|x\|_2 \leq c \cdot \|x\|_1$

$\forall x \in X \Rightarrow \|x\|_2 \leq \|x\| \leq c \cdot \|x\|_1$, $\forall x \in X$

Εφόσον, $(X, \|\cdot\|_2)$, $(X, \|\cdot\|_1)$ χώροι Banach

Προκύπτει ότι $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ ισοδύναμες $\leftarrow$ Πόρισμα ανοιχτής απεικόνισης